Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Aufnahmeprüfung Mathematik

Januar 2024

Teil 1 – Dauer: 60 Minuten

Die Aufnahmeprüfung Mathematik schriftlich besteht aus zwei Teilen:
Teil 1 – 60 Minuten (Kurzaufgaben) und
Teil 2 – 180 Minuten (Textaufgaben)

---

mit Lösungen

Zugelassene Hilfsmittel: KEINE

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
maximale Punktzahl	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
erreichte Punktzahl											

Teil 1

1. Berechnen Sie $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^4$.

Hinweis: Geben Sie die exakte Lösung in der Polarform an.

Ihre Antwort

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x - \dfrac{18y + 28}{4} & = 12 \\ \dfrac{x+5}{9} - y & = 2 \end{cases}$$

Ihre Antwort

3. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in [0, 2\pi)$ der Gleichung

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0.$$

Ihre Antwort

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $\mathbb{R}$

$$\log_2(2x+1) - \frac{1}{2}\log_2(4x^2-1) = 1.$$

Ihre Antwort

5. Gesucht ist eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion $f(x)$, deren Graph mit dem unten gezeichneten Graphen (blau in der Abbildung) übereinstimmt, an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle hat (siehe Punkt A in der Abb. 1) und für welche die Gerade $g(x) = -x$ eine (schräge) Asymptote ist (gestrichelt in der Abbildung unten).
Wie lautet die Funktion $f(x)$?

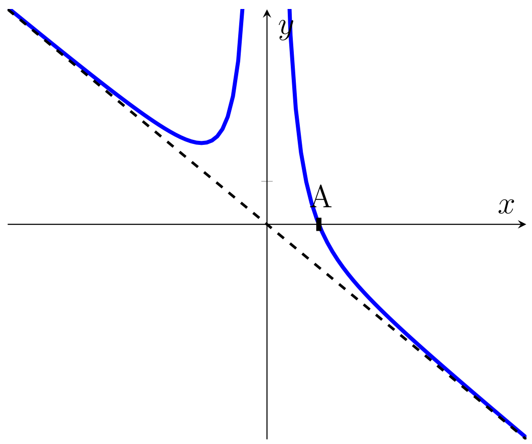

Abbildung 1: Illustration des Graphen der gesuchten Funktion

Ihre Antwort

6. Wir betrachten den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{4-x}$ (siehe Abb. 2). Die Punkte A und B bezeichnen die Schnittpunkte des Graphen der gegebenen Funktion $f(x)$ mit den Koordinatenachsen.
In welchem Punkt P verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ parallel zur Strecke $s = AB$?

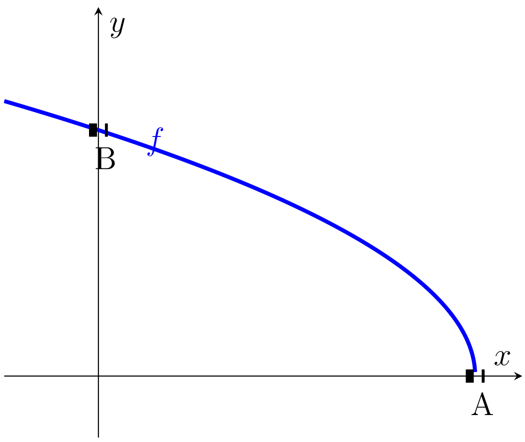

Abbildung 2: Illustration des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{4-x}$

Ihre Antwort

7. Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = \cos(x) \cdot \sin^2(x)$ wie folgt lautet

$$f'(x) = 2\sin(x) - 3\sin^3(x).$$

Ihre Antwort

8. Berechnen Sie den Wert des folgenden bestimmten Integrals

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

Ihre Antwort

9. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Ecken $A = (-2, 1, 3)$, $B = (3, 5, 6)$ und $C = (-1, 5, 2)$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks ABC.

Ihre Antwort

10. In Oberbayern leben im Juli fünfmal so viele Touristen wie Einheimische. 60% der Touristen tragen einen Trachtenhut. Nur 10% der einheimischen Personen tragen einen Trachtenhut. Im Juli kommt Ihnen auf der Strasse eine Person mit Trachtenhut entgegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine einheimische Person?

Ihre Antwort

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Aufnahmeprüfung Mathematik

Januar 2024

Teil 1 – Dauer: 60 Minuten

Lösungen

Die Aufnahmeprüfung Mathematik schriftlich besteht aus zwei Teilen:
Teil 1 – 60 Minuten (Kurzfragen) und
Teil 2 – 180 Minuten (Textaufgaben)

Zugelassene Hilfsmittel: KEINE

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
maximale Punktzahl	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
erreichte Punktzahl											

Teil 1

1. Berechnen Sie $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^4$.

Hinweis: Geben Sie die exakte Lösung in der Polarform an.

Ihre Antwort

Es gilt $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\pi/6}$, und damit $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^4 = \mathbf{e^{-i4\pi/6}} = \mathbf{e^{-i2\pi/3}} = \mathbf{cis(-120^\circ)} = \mathbf{cis}\left(-\frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}}\right)$.
Es werden auch die folgenden Antworten als korrekt gewertet: $e^{i4\pi/3} = cis(240^\circ) = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x - \dfrac{18y+28}{4} & = 12 \\ \dfrac{x+5}{9} - y & = 2 \end{cases}$$

Ihre Antwort

Multipliziert man die erste Gleichung mit 4 und die zweite Gleichung mit 9 erhält man zuerst (nach Vereinfachung)

$$\begin{cases} 4x - 18y & = 76 \\ x - 9y & = 13 \end{cases}$$

Nun kann man die zweite Gleichung nach x auflösen und erhält damit $x = 13 + 9y$. Damit lautet die erste Gleichung noch (nach Vereinfachung) $18y = 24$. Daraus erhalten wir zuerst $y = \frac{4}{3}$ und dann $x = 25$. Die gesuchte Lösungsmenge besteht also aus genau einem Element und lautet $\mathbf{L} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{25}, \mathbf{4/3})\}$.

3. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in [0, 2\pi)$ der Gleichung

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0.$$

Ihre Antwort

Die gegeben Gleichung kann mit Hilfe der neuen Variablen $y = \cos(x)$ umgeschrieben werden als $2x^2 + x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $y_1 = -1$ und $y_2 = 1/2$. D.h. es muss gelten $\cos(x) = -1$ oder $\cos(x) = 1/2$. Lösen wir dies nun noch nach x auf, haben wir im Intervall $[0, 2\pi)$ die drei Lösungen $\mathbf{x_1} = \frac{\pi}{\mathbf{3}}$, $\mathbf{x_2} = \pi$ und $\mathbf{x_3} = \frac{\mathbf{5}\pi}{\mathbf{3}}$.
Für die Angabe $\cos(x) \in \{-1, 1/2\}$ gibt es einen Punkt.

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $\mathbb{R}$

$$\log_2(2x+1) - \frac{1}{2}\log_2(4x^2 - 1) = 1.$$

Ihre Antwort

Die linke Seite der gegebenen Gleichung lässt sich mit Hilfe der Logarithmengesetze wie folgt umschreiben ($x \neq \pm 1/2$, da sonst mindestens eines der Argumente im Logarithmus verschwindet)

$$\begin{aligned}
&\log_2(2x+1) - \frac{1}{2}\log_2(4x^2-1) = \log_2(2x+1) - \frac{1}{2}\log_2\Big((2x+1)(2x-1)\Big) \\
&= \log_2(2x+1) - \frac{1}{2}\log_2(2x+1) - \frac{1}{2}\log_2(2x-1) = \frac{1}{2}\log_2(2x+1) - \frac{1}{2}\log_2(2x-1) \\
&= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)
\end{aligned}$$

Wir müssen also die folgende Gleichung lösen

$$\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{2x-1} = 2^2 = 4$$

Diese letzte Gleichung ist äquivalent zur Gleichung $2x + 1 = 8x - 4$, deren Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{5/6}$ lautet. Dies ist auch gerade die gesuchte Lösung der gegebenen Gleichung.
Für die Antwort $L = \{-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$ gibt es einen Punkt.

5. Gesucht ist eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion $f(x)$, deren Graph mit dem unten gezeichneten Graphen (blau in der Abbildung) übereinstimmt, an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle hat (siehe Punkt A in der Abb. 1) und für welche die Gerade $g(x) = -x$ eine (schräge) Asymptote ist (gestrichelt in der Abbildung unten).
Wie lautet die Funktion $f(x)$?

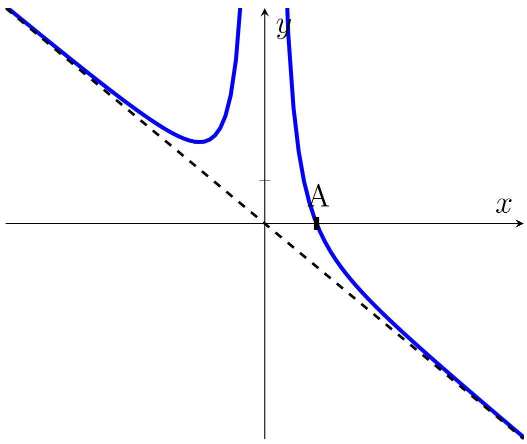

Abbildung 1: Illustration des Graphen der gesuchten Funktion

Ihre Antwort

Die gesuchte Funktion muss von der Form sein:

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}.$$

Dabei muss das Zählerpolynom, $z(x)$, einen Grad haben, der um eins grösser ist als der Grad des Nennerpolynoms $n(x)$, da wir die gegebene (schräge) Asymptote $g(x) = -x$ haben.
Ausserdem muss $n(x)$ bei $x = 0$ eine (doppelte) Nullstelle haben, da die gegebene Funktion bei $x = 0$ eine Polstelle hat und zudem sind um den Nullpunkt die Funktionswerte von $f(x)$ positiv, unabhängig vom Vorzeichen des Arguments x. Die führt uns auf den einfachsten Ansatz

$$f(x) = \frac{ax^3 + d}{x^2}$$

Da $g(x) = -x$ eine (schräge) Asymptote ist, können wir sofort schliessen, dass $a = -1$ gelten muss. Soll schliesslich $f(x)$ bei $x = 2$ eine Nullstelle haben, muss noch $d = 8$ gewählt werden. Zusammenfassend erfüllt die Funktion

$$\mathbf{f(x) = \frac{-x^3 + 8}{x^2}}$$

die gewünschten Eigenschaften.

6. Wir betrachten den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{4-x}$ (siehe Abb. 2). Die Punkte A und B bezeichnen die Schnittpunkte des Graphen der gegebenen Funktion $f(x)$ mit den Koordinatenachsen.
In welchem Punkt P verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ parallel zur Strecke $s = AB$?

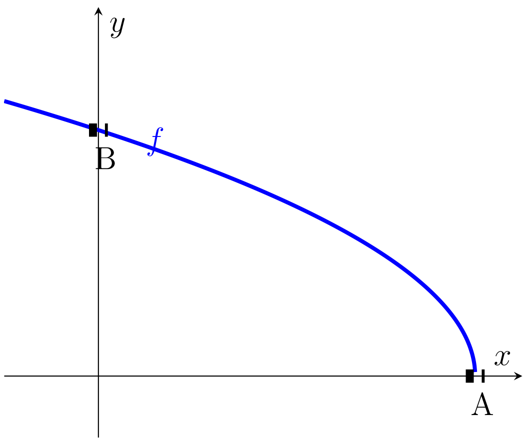

Abbildung 2: Illustration des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{4-x}$

Ihre Antwort

Die beiden Punkte A und B haben die Koordinaten $A = (4, 0)$ und $B = (0, 2)$. Die Strecke $s = AB$ hat somit Steigung $m = \frac{1}{2}$. Gefragt ist also diejenige Stelle, an welcher der gegebene Graph eine Steigung vom $m = 1/2$ hat. Für die Ableitung der Funktion $f(x)$ gilt $f'(x) = \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}$. Es muss also gelten

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (4-x)^{-1/2} \quad \Leftrightarrow \quad (4-x)^{1/2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x = 1 \quad \Leftrightarrow x = 3$$

Die Koordinaten des gesuchten Punktes lauten als $\mathbf{P} = (\mathbf{3}, \mathbf{1})$.

Für die Antwort $x = 3$ gibt es einen Punkt.

7. Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = \cos(x) \cdot \sin^2(x)$ wie folgt lautet

$$f'(x) = 2\sin(x) - 3\sin^3(x).$$

Ihre Antwort

Mit Hilfe der Produktregel leiten wir die gegebene Funktion wie folgt ab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) \cdot \sin^2(x) + \cos(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) \\ &= -\sin^3(x) + 2\cos^2(x)\sin(x) \end{aligned}$$

Nun verwenden wir noch die Tatsache, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Damit ergibt sich aus der obigen Rechnung

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin^3(x) + 2\cos^2(x)\sin(x) \\ &= -\sin^3(x) + 2\big(1 - \sin^2(x)\big)\sin(x) = -\sin^3(x) + 2\sin(x) - 2\sin^3(x) \\ &= 2\sin(x) - 3\sin^3(x) \end{aligned}$$

Wer nur die erste Ableitung (korrekt) aufgeschrieben hat, bekommt einen Punkt.

8. Berechnen Sie den Wert des folgenden bestimmten Integrals

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2-1}\,dx.$$

Ihre Antwort

Wir substituieren die ursprüngliche Variable x durch die neue Variable $y = x^2 - 1$ (mit $dy = 2dx$) und erhalten dabei (Transformation der Integrationsgrenzen nicht vergessen) – kann man auch ohne Substitution lösen (durch Evidenz)

$$\begin{aligned} \int_1^4 x\sqrt{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{15} \sqrt{y}\,dy \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^{15} \\ &= \mathbf{\frac{1}{3}15^{3/2} = \frac{1}{3}\cdot 15\cdot 15^{1/2} = 5\sqrt{15}} \end{aligned}$$

9. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Ecken $A = (-2, 1, 3)$, $B = (3, 5, 6)$ und $C = (-1, 5, 2)$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks ABC.

Ihre Antwort

Wir haben $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Damit ist der gesuchte Flächeninhalt A gerade

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}8\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = \mathbf{12}$$

10. In Oberbayern leben im Juli fünfmal so viele Touristen wie Einheimische. 60% der Touristen tragen einen Trachtenhut. Nur 10% der einheimischen Personen tragen einen Trachtenhut. Im Juli kommt Ihnen auf der Strasse eine Person mit Trachtenhut entgegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine einheimische Person?

Ihre Antwort

Die gesuchte Wahrscheinlich berechnet sich wie folgt

$$P = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{60} + \frac{30}{60}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{31}{60}} = \mathbf{\frac{1}{31}}$$